MATEMATIČKI MODEL NA TRANSPORTNIM MREŽAMA

Prof. dr. Sead Rešić, email: sresic@hotmail.com
Prirodno matematički fakultet, Univerzitet u Tuzli
Elvir Čajić, prof., email: ecajic86@gmail.com
Anela Hrnjičić, MA, email: anela_muran@hotmail.com
Mješovita srednja tehnička škola Travnik, Internacionalni univerzitet Travnik u Travniku

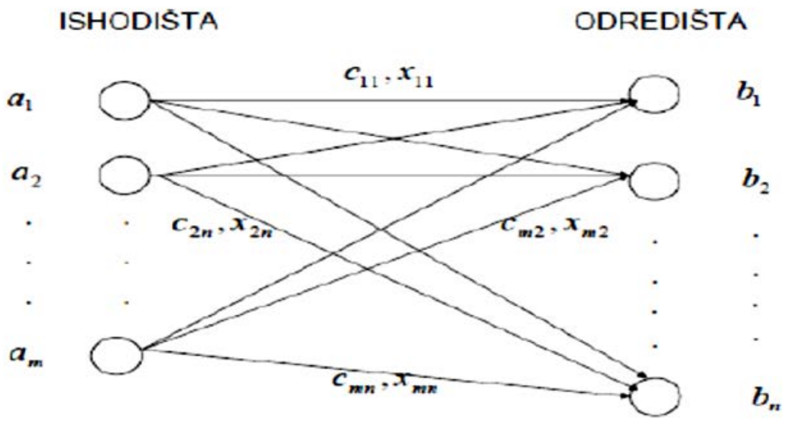
Abstrakt: Matematički model opisuje sistem pomoću niza skupova, jednačina, varijabli koji opisuju veze i odnose među njima. Sistem je apstraktna cjelina, za koju smatramo da nema interakcija s okolinom nego je izolirana i egzistira kao nezavisna. Njčešće je sistem definisan matematičkim relacijama između ulaznih i izlaznih veličina. Varijable u modelu predstavljaju neke osobine sistema. One mogu biti ulazne, izlazne, nezavisne, zavisne, varijable stanja i slučajne varijable. Najčešće se za modeliranje koriste matematičke funkcije i parametre optimiramo aproksimacijom ili interpolacijom neke krive. Matematičko modeliranje je prepoznatljivo kao proces primjene matematike na realni sistem radi mogućnosti provjeravanja potrebnih informacija. Važno je naglasti da modeliranje ne mora riješiti problem ali će vjerovatno rasvijetliti problem i pojasniti posmtranu situaciju. Primjena matematičkog modela i programksih alata ima za cilj smanjenje mogućnosti nastanka takvih problema i njihovih rješavanja ako do njih ipak dođe. Model je zatvorenog tarnsportnog problema.Takođe je prikazan u programskom paketu matlab jedan transportni problem te aproksimativno riješen.
Ključne riječi: Transportni model, otvoreni i zatvoreni model, matematički model

MATHEMATICAL MODEL FOR TRANSPORTING NETWORKS

Abstract: The mathematical model describes a system with a set of sets, equations, variables that describe the relationships and relationships between them. The system is an abstract whole, which we consider to have no interaction with the environment, but is isolated and exists as an independent one. The system is defined by mathematical relations between input and output sizes. Variables in the model represent some system features. They can be input, output, independent, dependencies, state variables, and random variables. Mathematical models can be linear, nonlinear, deterministic, stohactic, static, dynamic, discrete, continual, deductive and iduktive. Usually mathematical functions are used for modeling and we optimize the parameters by approximation or interpolation of some curve. It is important to emphasize that modeling does not have to solve the problem, but it will probably illuminate the problem and clarify the pose situation. Application of a mathematical model and programmatic tools is aimed at reducing the possibility of such problems and resolving them if they do occur. The paper presents a mathematical model of the closed transport problem, transport network analytically. It is also presented in the program package matlab a transport problem and approximated.
Key words: Transport model, open and closed model, mathematical model

1. Transportni problem

Rješavanjem transportnog problema na transportnoj mreži dobija se optimalan način odvijanja transporta između većeg broja centra za dobavljanje i centra potražnje. Centar dobavljača ima svoj vlastiti kapacitet, a centar potražnje ima svoj nivo potražnje. Centar dobavljača može na primjer biti određeni distributer, a centar potražnje krajnji korisnik, odnosno kupac. Transportni putevi između navedenih centara imaju različite jednične cijene transporta, te se rješavanjem ovog problema želi postići odabir što kvalitetnijeg rješenja za transport između čvorova. Kako bi rješenje problema bilo optimalno, moraju se zadovoljiti dva uslova i to potražnja na mreži mora biti zadovoljena, a drugi je da se to učini uz minimalne transportne troškove. Naravno prvo je potrebno naći počento rješenje, a zatim optimalno. Za određivanje početnog rješenja koriste se metode poput: metoda najmanjeg troška, te Vogelova aproksimativna metoda. Optimalno rješenje provodi se pomoću metode relativnih troškova.



Slika 1. Šematski prikaz transportnog problema.

Na slici 1 prikaza je šema transportnog problema, odvijanja transporta između različitih ishodišta $(\boldsymbol{a_m})$ i odredišta $(\boldsymbol{b_n})$ gdje $\boldsymbol{C_{ij}}$ označava jedinični trošak iz ishodišta$i$do odredišta j, a $\boldsymbol{X_{ij}}$ transportnu količinu iz ishodišta i do odredišta j.

2. Matematički model zatvorenog transportnog problema

Transportni problem je problem lienarnog programiranja $m+n$ jednačina sa $m \cdot n$ varijabli. Sistem sadrži $m+n-1$ nezavisnih jednačina iz čega slijedi da rješenje mora sadržavati $m+n-1$vrijednost varijabli. Rješenje s manje od $m+n-1$ vrijednosti varijabli je degenerirano. Kako bi se transportni model pravilno prikazao matematičkim modelom treba ga formulisati, to jest matematički postaviti. Potrebno je odrediti funkciju cilja varijable odlučivanja te ograničenja. Matematički model je prikazan pomoću transportnog problema između ishodišta i i odredišta j, kao što je prikazano na slici 1. Uzmajući u obzir da je zatvoreni sistem, potražnja je tada jednaka ponudi, što bi se matematički moglo zapisati ovako:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j \qquad 1$$

Postavljanje transportnog problema:

- Ukupno dobavljeno iz ishodišta i je a_i, gdje je i = 1,2,...,m (m-broj ishodišta)
- Ukupna potražnja iz odredišta j je b_j gdje je j = 1,2,..., n (n-broj odredišta)
- c_{ij}= trošak prevoza jedinice robe od ishodišta i do odredišta j, za i=1,2,...,m, a j=1,2,...,n.
- X_{ij}= količina robe koju treba prevesti od ishodišta i do odredišta j za i=1,2,...,m, a j=1,2,...,n.

Funkcija cilja:

- min Z = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, prefiks min se nalazi ispred funkcije, zato što se traži minimalan ukupni trošak transporta.

Ograničenje za ishodište:

- $x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{1n} = a_1$
- $x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m$
- $\sum_{j=1}^{n} = a_i$, i=1,2,...,m - zbir potražnje robe na odredištu *j*, jednak je ponudi ishodišta *i*.

Ograničenje za odredište:

- $x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{m1} = b_1$
- $x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n$
- $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$, j=1,2,...,m-zbir ponude robe na ishodištu *i*, jednak je potražnji odredišta *j*.

Pregled matematičkog modela:

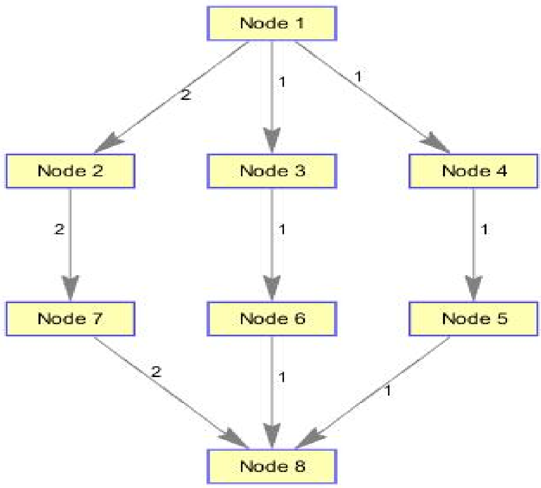
- min Z = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ -funkcija cilja
- $\sum_{j=1}^{n} = a_i$, i=1,2,...,m-ograničenje
- $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$, j=1,2,...,m-ograničenje
- $X_{ij} \geq 0, za\ i = 1,2, \dots, m\ i\ j = 1,2, \dots, n$- varijabla odlučivanja.

2.1 Programski kod u matlabu

Ulazni dio koda :

```
% Rješavanje problema sa maksimalnim protokom koristeći
minimalnu teoriju rezanja troškova
Flow=sparse([1 1 1 2 3 3 4 5 6 6 6 7 7],[2 3 4 7 2 6 5 8 2 5 8
6 8],[4 2 3 2 3 1 2 1 4 3 4 2 3],8,8);
[M,F,K]=graphmaxflow(Flow,1,8);
% M je maksimalan protok proizvoda
% F je protok na svakoj liniji
% K je minimalno rezanje (rezultat prikazan u matrici)
view(biograph(F,[],'ShowWeights','on')) % Broj prikaza
set(h,Cvorova(K(1,:)),'Color',[1 0 0]);
```

Izlaz to jest aproksimacija rješenja prikazana je na slici:



Slika 2. Prikaz putanje između čvorva transporta sa masksimalnim protokom i minimalnim brojem troškova.

2.2 Primjer matematičkog modela zatvorenog transportnog problema

Pretpostavimo da određeni lanac prodavnica raspolaže sa 3 skladišta i 4 izložbena prostora. Skladišta (ishodišta) ćemo obilježiti sa I_1, I_2, I_3, dok ćemo izložbene prostore (odredišta) obeležiti sa O_1, O_2, O_3, O_4. Ako skladišta imaju robe da napune 2, 6 i 7 kamiona dnevno, a izložbeni prostori mogu da prodaju 3, 3, 4 i 5 kamiona robe dnevno, potrebno je da se napravi plan vožnje tako da se roba preveze od ishodišta do odredišta za što kraće vrijeme. Vrijeme potrebno da određeni kamion pređe od ishodišta do odredišta izraženo je u minutima i dato u tabeli. [7]

Odredišta / Ishodišta	O_1	O_2	O_3	O_4
I_1	20	11	15	13
I_2	17	14	12	13
I_3	15	12	18	18

Tabela 1. Vrijeme potrebno za prelaz kamiona od ishodišta do odredišta [7]

Sada je potrebno za ovaj transportni problem postaviti matematički model, koji će pomoći da se zadatak riješi matematičkim putem, uz pomoć raznih metoda rješavanja trasnportnih problema.

Ako je roba koja se potražuje, jednaka količini robe koja se može dostaviti onda se taj problem naziva zatvorenim transportnim problemom.

Neka je x_{ij} količina robe koja se transportuje iz skladišta tj. ishodišta I_i, do izložbenog prostora tj. odredišta O_j. Neka trasnport robe iz ishodišta I_1, koji je kapacitet 2 kamiona, do odredišta O_1 traje 20 minuta, dok transport od ishodišta I_2 do odredišta O_2 traje 11 minuta, i tako redom. Radi preglednosti data je tablica transporta.

Odredišta / Ishodišta	**O_1**	**O_2**	**O_3**	**O_4**	**Broj raspoloživih kamiona**
I_1	20 x_{11}	11 x_{12}	15 x_{13}	13 x_{14}	**2**
I_2	17 x_{21}	14 x_{22}	12 x_{23}	13 x_{24}	**6**
I_3	15 x_{31}	12 x_{32}	18 x_{33}	18 x_{34}	**7**
Broj potrebnih kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15** / **15**

Tabela 2: Tablica transporta [7]

Transportni problem predstavlja problem linearnog programiranja (jedinična vremena su linearna u odnosu prema broju kamiona) i može se rješavati na više načina:

- simpleks metodom ili
- specijalnim metodama za rješavanje transportnih problema linearnog problema.

Kada bismo rješavali simpleks metodom, tada bi matematički model za dati problem izgledao ovako:

$$\min Z = 20x_{11} + 11x_{12} + 15x_{13} + 13x_{14} + 17x_{21} + 14x_{22} + 12x_{23} + 13x_{24} + 15x_{31} + 12x_{32} + 18x_{33} + 18x_{34}$$

Uz ograničenja:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 6$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 7$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5$$

Ovaj transportni problem, možemo rješavati specijalnim metodama rješavanja transportnih problema. Ove metode možemo svrstati u dvije kategorije:

- metode za određivanje početnog (baričnog) rješenja,

- metode za dobijanje optimalnog rješenja (nastaje poboljšanjem početnog tj. bazičnog rješenja).

U metode za određivanje početnog (baznog) rješenja spadaju:

- metoda sjeverozapadnog ugla
- metoda najmanjih cijena
- Vogelova metoda

U metoda za određivanje optimalnog rješenja spadaju:

- Metoda skakanja s kamena na kamen (Stepping Stone Method)
- Metoda koeficijenata ili modificirana metoda distribucije (MODI)
- Metoda raspoređivanja

Navedene metode za određivanja optimalnog rješenja provjeravaju prvo je li početno bazično rješenje optimalno ili nije. Ukoliko početno bazično rjšenje nije optimalno, svakom od metoda se pokazuje kako se prelazi na bolje bazično rješenje tj. na bazično rješenje koje osigurava smanjenje ukupnih troškova transporta. Tako, rješavanjem metodom sjeverozapadnog ugla dobili smo početno bazično rješenje tj. vrijeme transporta je Z = 249 minuta. Metodom najmanjih cijena vrijeme trasnporta je Z = 207 minuta, dok je Vogelovom metodom Z = 199 minuta. Metodom skakanja s kamena na kamen početno bazično rjšenje tj. vrijeme transport Z = 249 minuta poboljšalji smo na Z = 199 minuta. Također, i MODI metodom početno bazično vrijeme trasnporta Z = 249 min smo poboljšali na Z = 199 minuta.

3. Zaključna razmatranja

U ovom radu je predstavljeno rješenje transportnog problema putem matematičkog modela. Dakle, kao što smo vidjeli definisali smo ulazne varijable, ograničenja i matematičku funkciju. Odredili smo ograničenja za ishodište, odredište. Zatim smo definisali ciljnu funkciju, a potom napravili matematički model. U softverskom rješenju u matlabu u par linija koda prikazali smo rješenje problema sa maksimalnim protokom i minimalnom cijenom rezanja. Izlaz su bili Nodovi ili čvorovi, te putanje minimalnih cijena troškova transporta. Također, rješavanjem primjera zatvorenog trasnportonog problema pokazali smo rezultate nekoliko metoda za rješavanje trasnportnih problema.

4. Literatura

[1] M. Braun, Differential Equations and Their Applications, Springer, New York, 1993.
[2] D. Mooney, R. Swift, A Course in Mathematical Modelling, Mathematical Association of America, 1999.
[3] D. Burghes, M. Borrie, Modelling With Differential Equations, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1982.
[4] M.S. Klamkin (Editor), Mathematical Modelling: Classroom Notes in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1987.
[5] M. Alić, Obične diferencijalne jednadžbe, PMF-Matematièki Odjel, Zagreb, 1994.
[6] A. Tokić , Modelovanje i simulacije, Tuzla 2005
[7] M. Ivanović, Operaciona istraživanja-vježbe, skripta, Beograd, 2014.