



MODELI OPTIMIZACIJE U PROCESU UPRAVLJANJA PROJEKTOM

Sead Rešić, email: sresic@hotmail.com

Prirodno matematički fakultet, Univerzitet u Tuzli

Edita Vuković

Ekonomski fakultet Bihać, Univerzitet u Bihaću

Maid Omerović

Edukacijski fakultet Travnik, Univerzitet u Travniku

Anela Muran

Internacionalni Univerzitet Travnik u Travniku

Sažetak: Projekt je niz aktivnosti koji vodi ka ostvarenju određenog cilja. Za realizaciju svakog projekta u praksi se primjenjuje postupak izrade varijanti rješenja i donošenje odluke o najpovoljnijem rješenju. Ovaj postupak se najbolje može prikazati metodama optimizacije. Opći pristup u metodama optimizacije polazi od formiranja odgovarajućeg matematičkog modela za realni problem koji se razmatra. Matematički model nam služi za izvođenje potrebnih analiza na osnovu kojih možemo doći do odgovora u vezi sa postavljenim problemom. Na osnovu provođenja eksperimenata na matematičkom modelu treba zaključiti koje je rješenje najbolje i njega predložiti donosiocima odluke da ga implementiraju u praksi. **Cljučne riječi:** Optimizacija, upravljanje, matematički model, projekat

OPTIMIZATION MODELS IN THE PROCESS OF PROJECT MANAGEMENT

Abstract: The project is a series of activities leading to the achievement of a particular goal. For the realization of any project in practice there are variants of making the decision and a decision on the best solution. This process can best be displayed optimization methods. The general approach to the optimization methods is based on the formation of an appropriate mathematical model of a real problem that is being addressed. The mathematical model is used for carrying out the necessary analyzes on the basis of which we can get the answers in relation to the problem of study. On the basis of conducting experiments on the mathematical model must be concluded that the best solution and it propose to decision-makers to implement it in practice.

Keywords: Optimization, management, mathematical model, project

1. Uvod

Upravljanje projektom predstavlja neprekidno djelovanje upravljačkog tijela kojim se utiče na parametre procesa s ciljem realizacije željenog projekta u zadanom vremenu i bez prekoračenja dozvoljenih resursa. Za realizaciju svakog projekta u praksi se primjenjuje postupak izrade varijanti rješenja i donošenje odluke o najpovoljnijem rješenju. Ovaj postupak se najbolje može prikazati metodama optimizacije.

Opći pristup u metodama optimizacije polazi od formiranja odgovarajućeg matematičkog modela za realni problem koji se razmatra. Matematički model nam služi za izvođenje potrebnih analiza na osnovu kojih možemo doći do odgovora u vezi sa postavljenim problemom. Na osnovu provođenja eksperimenata na matematičkom modelu treba zaključiti



koje je rješenje najbolje i njega predložiti donosiocima odluke da ga implementiraju u praksi. U rješavanju problema metodama optimizacije kao polazna tačka koriste se ekonomski ciljevi preduzeća. Ekonomski ciljevi preduzeća ne moraju biti konkretno maksimalna dobit već mogu biti i minimalni troškovi određenog projekta ili ispunjavanje tačno utvrđenog vremena izvršavanja projekta. U ovom radu smo na praktičnim primjerima pokazali na koji način ispitati i analizirati rješenja posmatranih problema s kojima se susreće određeno preduzeće pri realizaciji konkretnog projekta.

Danas u svijetu su sve veće podjele rada i specijalizacije, pa samim time i planiranje i upravljanje sistemima postaje složenije. Koordinacija učesnika u obavljanju poslovnog zadatka ima veliki značaj i odlučujući uticaj na efikasnost njegovog izvršavanja. Iskorištenost raspoloživog vremena, radne snage i sredstava pri realizaciji poslovnog zadatka zaslužuje posebnu pažnju. Efikasno upravljanje je, pored ostalih faktora, jedan od uvjeta za pravovremeno i racionalno izvršavanje poslova. Uobičajene metode planiranja realizacije poslovnog zadatka bave se djelomičnim planiranjem, kao što su: prikazivanje redoslijeda poslova, kontrola napredovanja poslova, planiranje sredstava za rad i kontrola njihovog utroška, kontrola troškova i sl.

Projekt je niz aktivnosti koje vode ka ostvarenju određenog cilja. U svakom projektu može da se postavi više ciljeva, s raznih aspekata. Na primjer, upotreba resursa, radna snaga, vrijeme trajanja projekta i slično. Najčešće postavljeni cilj jeste minimizacija vremena trajanja projekta uz minimizaciju resursa. Osnovni elementi projekta su zadaci ili aktivnosti koje je potrebno ispuniti i resursi koji se pri tome koriste. Svaki projekt ima određeno vrijeme početka i vrijeme završetka. Ishod pojedinačnog projekta se ne može predvidjeti s potpunom sigurnošću, jer projekt ovisi o svakoj pojedinačnoj aktivnosti. Zbog toga je u procesu planiranja projekta potrebno razmotriti moguće probleme, te korekcije plana u samom toku realizacije projekta. U ovom radu će se istraživanje zasnivati na stanju u teoriji i praksi upravljanja projektima i metodologije upravljanja projektom.

2. POJAM PROJEKTA I OSNOVNI ELEMENTI PROJEKTA

Projekt je svaki pothvat, proces ili posao koji predstavlja objekt planiranja. To je bilo koji poslovni zadatak koji se može izraziti skupom ekonomskih, organizacijskih, tehničkih i drugih poslova usmjerenih na izvršavanje nekog složenog zadatka. Pojam uključuje sve pothvate, sitne zadatke koji se sastoje od malog broja djelimičnih poslova, te vrlo složene zadatke koji se sastoje od velikih poslova s mnogobrojnim radovima i velikim brojem izvršitelja. Kriterij za proglašavanje projektom nije obimnost zadatka nego složenost zadatka. Bitno je da predstavlja konačni niz uređenih operacija koje vode ka realizaciji određenog skupa ciljeva. Ovako definiran pojam obuhvaća zadatke iz raznih oblasti djelatnosti.

”Projekt predstavlja poseban poduhvat koji se ne može ponoviti. On obično podrazumijeva ostvarivanje planiranih rezultata u okviru određenog vremenskog perioda i budžeta. Svaki projekt je jedinstven i stoga se njegov ishod ne može predvidjeti sa potpunom sigurnošću. Zato su projekti poduhvati koji sadrže rizik.”(Lock, 1977.)



2.1. Mrežno planiranje

Praktično, nema poslovnog zadatka koji se ne može tretirati u smislu mrežnog planiranja. Svaka od analiza koje sačinjavaju mrežno planiranje operira određenim brojem osnovnih pojmova. Najvažniji pojmovi u mrežnom planiranju, koje smo već definisali, su:

- aktivnost
- događaj.

2.1.1. Analiza structure

Analiza strukture obuhvaća ispitivanje i utvrđivanje redoslijeda i međusobnih ovisnosti aktivnosti projekta. Za dati projekt utvrđuju se aktivnosti i sastavlja njihov popis. Kada se utvrde aktivnosti, projekt se podijeli na tehnološko-tehničke i ekonomski samostalne dijelove. Kvalitativnom analizom strukture projekta utvrđuju se međusobne zavisnosti aktivnosti. U razmatranju projekta posebno se mora paziti da se ispravno utvrde prethodne i naredne aktivnosti, kako se u daljoj analizi ne bi pojavile zavisnosti koje u stvarnosti ne postoje.

Iskazivanje aktivnosti, njihovog redoslojeda i zavisnosti, možemo vršiti pomoću:

- tabele popisa aktivnosti
- mrežnog dijagrama.

Mrežni dijagram (model) projekta predstavlja grafički prikaz projekta. To je matematički model projekta pomoću kojeg možemo analizirati i objasniti rezultate posmatranog poslovnog zadatka. Mrežni dijagram projekta odražava redoslijed izvršavanja aktivnosti.

Aktivnost se grafički prikazuje usmjerenom duži (strjelicom), s tim što dužina strjelice ne odražava mjeru aktivnosti. Umjetne aktivnosti se prikazuju isprekidanom strjelicom.

Događaj grafički prikazujemo kružnicom. Kako svaka aktivnost ima početni i završni događaj, svaka strjelica ima na početku i na kraju kružnicu. Tako možemo reći da mrežni dijagram ima izgled niza strjelica koje su povezane kružnicom.

Kada nacrtamo mrežni dijagram vršimo numerisanje događaja. Svakom događaju (kružnici) pridružujemo jedan broj. Početni događaj numerišemo sa 1, a završni sa n . Ostali događaji dobijaju prirodne brojeve iz intervala $(1, n)$, uz uslov da je $i < j$, gdje i označava događaj koji se zbiva ranije, a j događaj koji se zbiva poslije i događaja. Ako sa i označimo početni događaj, a sa j završni događaj jedne aktivnosti, što dozvoljavaju pravila numerisanja, onda za aktivnost možemo uzeti simbol A_{ij} . Oznaka govori u kojem događaju aktivnost počinje i u kojem se završava.

Mrežni dijagram ćemo lako i ispravno uraditi ako tačno uočimo:

- koje aktivnosti moraju biti završene prije početka date aktivnosti,
- koje se aktivnosti mogu izvršavati istovremeno,
- koje aktivnosti mogu biti započete poslije završetka date aktivnosti i
- koje ostale aktivnosti moraju biti završene istovremeno sa završetkom date aktivnosti.

Tačno urađen mrežni dijagram mora ispunjavati sljedeće uslove:

- ima samo jedan početni i završni događaj (kružnicu),
- postoji barem jedan put od početnog do završnog događaja projekta,
- iz svakog događaja (kružnice) postoji put do završnog događaja projekta i



- nije dozvoljeno postojanje petlje.

2.1.2. Analiza vremena

Izvršavanje bilo kojeg poslovnog zadatka ili aktivnosti vezano je za protok vremena. Zato analiza redoslijeda i međusobne zavisnosti aktivnosti, iako se može vršiti strogo odvojeno od analize vremena, nije potpuna analiza projekta. Analiza projekta dobija svoj potpuniji značaj kada u model uvrstimo vrijeme. Tada mrežnim planiranjem možemo izračunati vrijeme izvršavanja projekta i nadzirati njegovo vremensko odvijanje, te uticati na održavanje rokova i sl.

Analiza vremena u mrežnom planiranju obuhvaća:

- utvrđivanje vremenskih parametara aktivnosti, tj. određivanje vremena svake aktivnosti
- izračunavanje vremena trajanja (završetka) projekta.

Vrijeme trajanja aktivnosti se utvrđuje na temelju opisa aktivnosti i raspoloživih činilaca koji obavljaju aktivnost. Vrijeme trajanja svih aktivnosti jednog projekta mora biti dato u istim vremenskim jedinicama, a to su obično: sati, dani, mjeseci i sl.

Vrijeme trajanja aktivnosti može biti dato, ovisno o karakteru posla koji aktivnost predstavlja:

- deterministički (precizno normirano) i
- stohastički (poznat zakon vjerovatnoće vremena trajanja aktivnosti).

Ta činjenica razultira dvije osnovne metode analize vremena u mrežnom planiranju:

- metoda kritičnog puta (CPM – Critical Path Method) i
- metoda ocjene i revizije programa (PERT – Program Evaluation and Review Technique).“(Andrijić, 2002:253)

Analiza vremena metodom kritičnog puta (CPM) se sastoji od:

(1) Vremena trajanja aktivnosti koje je tačno određeno u nekoj jedinici vremena. Ako smo aktivnost označili s A_{ij} , vrijeme trajanja aktivnosti ćemo označiti s t_{ij} .

(2) Vremena zbivanja događaja koje možemo računati kada smo utvrdili vremena t_{ij} i izgradili mrežni dijagram projekta. Za svaku aktivnost vezana su 4 vremenska zbivanja događaja:

- najraniji početak aktivnosti (t_i^0)
- najraniji završetak aktivnosti (t_j^0)
- najkasniji početak aktivnosti (t_i^1)
- najkasniji završetak aktivnosti (t_j^1).

U analizi vremena pomoću CPM, ovisno o odnosu prethodnih i narednih aktivnosti, postoje:

- ukupna ili opća vremenska rezerva (R_{ij}^u) koja govori za koliko se vremenskih jedinica može pomaknuti početak izvršavanja (ili povećati vrijeme trajanja) aktivnosti t_{ij} , a da ne dođe do produljenja vremena trajanja cijelog projekta; računa se formulom:



$$R_{ij}^s = t_j^1 - (t_i^0 + t_{ij})$$

- slobodna vremenska rezerva (R_{ij}^s) koja govori za koliko je vremenskih jedinica moguće kasnije početi izvršavati aktivnosti A_{ij} iza njenog najranijeg početka, a da se time ne ugroze najraniji počeci narednih aktivnosti; računa se formulom:

$$R_{ij}^s = t_j^0 - (t_i^0 + t_{ij})$$

- neovisna vremenska rezerva (R_{ij}^n) određuje broj vremenskih jedinica za koji je moguće produljiti vrijeme trajanja aktivnosti A_{ij} ili pomaknuti njen najraniji početak, bez uticaja na vremenske rezerve narednih aktivnosti; računa se formulom:

$$R_{ij}^n = t_j^1 - (t_i^1 + t_{ij})$$

- ovisna vremenska rezerva (R_{ij}^o) pokazuje vremenski razmak u kojem se može desiti događaj; računa se formulom:

$$R_{ij}^o = t_j^1 - t_i^0.$$

Izračunata vremena zbivanja događaja i vremenske rezerve služe nam da utvrdimo koje aktivnosti moraju početi u svojim najranijim počecima da bi bile završene u svojim najkasnijim završecima. To su aktivnosti čije su vremenske rezerve jednake nuli, što znači da nema slobode u vremenima njihovog izvršavanja, tj. moraju se izvršiti u tačno utvrđenim vremenima. Aktivnost s takvim osobinama je kritična aktivnost. Za kritičnu aktivnost vrijedi:

$$t_j^1 - t_i^0 = 0, \text{ tj. } t_i^0 = t_i^1 \text{ i } t_j^0 = t_j^1.$$

Put koji polazi od početnog događaja projekta (1), a završava se u završnom događaju projekta (n), i sadrži isključivo kritične aktivnosti je kritični put. Kako ga sačinjavaju kritične aktivnosti, on nema vremenskih rezervi

(3) Vremena trajanja projekta koje je jednako vremenu kritičnog puta koje je izraženo vrijednošću veličina $t_n^0 = t_n^1$.

Vrijeme trajanja projekta se može skratiti samo skraćivanjem vremena trajanja kritičnih aktivnosti. Analiza kritičnih aktivnosti ukazuje na potencijalne teškoće u realizaciji projekta. Također, analiza vremena metodom kritičnog puta osigurava uočavanje aktivnosti koje imaju vremenske rezerve, čime se otkrivaju mjesta (poslovi) gdje se nalaze neiskorišteni resursi. Njihovo razmještanje na kritične aktivnosti utiče na skraćivanje vremena trajanja kritičnih aktivnosti, a to znači i na skraćivanje vremena trajanja samog projekta.

Analiza vremena metodom ocjene i revizije programa (PERT) obuhvaća 3 dionice:

- (1) Utvrđivanje vremena trajanja aktivnosti. Vrijeme trajanja aktivnosti je stohastičko, tako da se može govoriti o vremenu njena izvršavanja. Poznat je vremenski razmak u kojem se aktivnost sa sigurnošću izvršava. Za svaku aktivnost utvrđujemo optimističko, najvjerovatnije i pesimističko vrijeme.

Optimističko vrijeme (a_{ij}) izvršavanja aktivnosti predstavlja vrijeme za koje se aktivnost može najranije izvršiti. Vjerovatnost izvršenja aktivnosti u vremenu kraćem od optimističkog jednaka je nuli, jer se izvršava u najpovoljnijim uvjetima za njeno izvršavanje.

Najvjerovatnije vrijeme (m_{ij}) određeno je vremenom za koje bi bila izvršena aktivnost u najvećem broju slučajeva, ako bi se više puta obavljala pod istim uvjetima.



Pesimističko vrijeme (b_{ij}) je najduže vrijeme izvršenja aktivnosti. Aktivnost se može u tom vremenu izvršiti u najnepovoljnijim uvjetima.

Za svaku aktivnost A_{ij} utvrđujemo vremena koja zadovoljavaju relaciju $a_{ij} < m_{ij} < b_{ij}$, a na osnovu kojih izračunavamo očekivano vrijeme trajanja aktivnosti i varijansu tog vremena.

Očekivano vrijeme trajanja aktivnosti t_{ij} izračunavamo formulom

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

(2) Izračunavanje vremena zbivanja događaja. Vremena zbivanja događaja utvrđujemo na način koji smo opisali u CPM.

(3) Utvrđivanje vremena trajanja projekta. Očekivano vrijeme trajanja projekta jednako je očekivanom vremenu zbivanja događaja (n).

Primjer 1:

Utvrđena su vremena trajanja aktivnosti jednog projekta:

a) deterministički,

b) stohastički

i prikazana sljedećom tabelom:

Tabela 1. Podaci o trajanju aktivnosti projekta

Aktivnost	a)	b)		
	Vrijeme trajanja aktivnosti	Vrijeme trajanja aktivnosti		
		a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
A_{12}	4	3	4	5
A_{13}	5	4	6	7
A_{26}	2	1	2	4
A_{34}	8	6	7	9
A_{35}	10	8	10	12
A_{46}	7	6	7	8
A_{56}	6	5	6	8

Treba izvršiti analizu vremena opisanog projekta.

Rješenje:

a) Postupak rada:

(1)

$$t_1^0 = 0$$

$$t_2^0 = 0 + 4 = 4$$

$$t_3^0 = 0 + 5 = 5$$

$$t_4^0 = 5 + 8 = 13$$



$$t_5^0 = 5 + 10 = 15$$

$$t_6^0 = \max\{4 + 2 = 6; 8 + 7 = 15; 15 + 6 = 21\} = 21$$

(2)

$$t_5^1 = 21$$

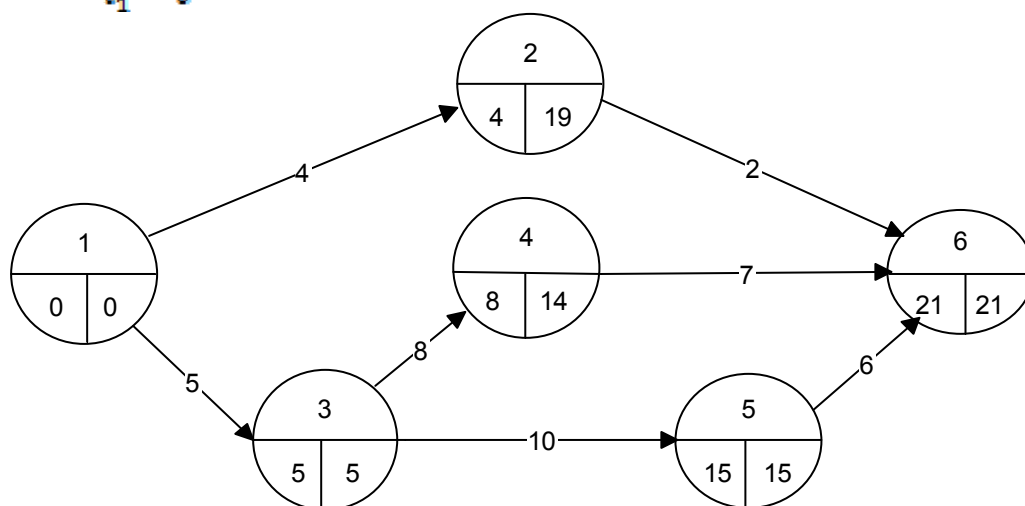
$$t_3^1 = 21 - 6 = 15$$

$$t_4^1 = 21 - 7 = 14$$

$$t_2^1 = \min\{15 - 10 = 5; 14 - 8 = 6\} = 5$$

$$t_1^1 = 21 - 2 = 19$$

$$t_1^1 = 0$$



Vrijeme izvršavanja projekta je 21 vremenska jedinica. Kritični put je A_{13}, A_{35}, A_{56} .

b) Prvo treba izračunati očekivana vremena trajanja aktivnosti t_{ij} na osnovu formule

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

$$t_{12} = \frac{3+4+4+5}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$t_{13} = \frac{4+4+6+7}{6} = \frac{31}{6} = 5,17$$

$$t_{26} = \frac{1+4+2+4}{6} = \frac{11}{6} = 1,83$$

$$t_{34} = \frac{6+4+7+9}{6} = \frac{26}{6} = 4,33$$

$$t_{35} = \frac{8+4+10+12}{6} = \frac{34}{6} = 5,67$$

$$t_{46} = \frac{6+4+7+8}{6} = \frac{25}{6} = 4,17$$

$$t_{56} = \frac{5+4+6+8}{6} = \frac{23}{6} = 3,83$$

Potupak izrade mrežnog dijagrama:

(1)

$$t_1^0 = 0$$

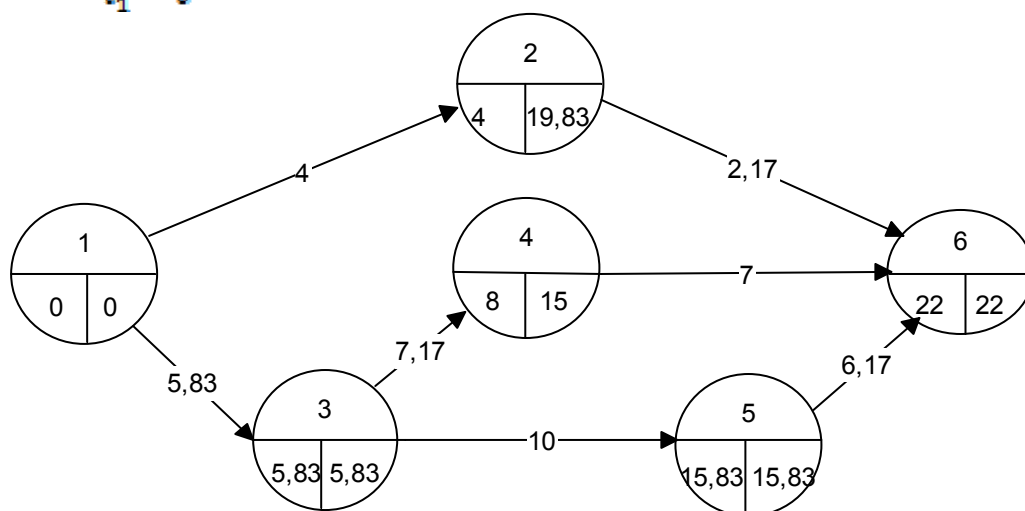
$$t_2^0 = 0 + 4 = 4$$

$$t_3^0 = 0 + 5,17 = 5,17$$

$$t_4^0 = 5,17 + 4,33 = 9,5$$



$$\begin{aligned}
 t_5^0 &= 5,83 + 10 = 15,83 \\
 t_6^0 &= \max\{4 + 2,17 = 6,17; 8 + 7 = 15; 15,83 + 6,17 = 22\} = 22 \\
 (2) \\
 t_5^1 &= 22 \\
 t_6^1 &= 22 - 6,17 = 15,83 \\
 t_4^1 &= 22 - 7 = 15 \\
 t_3^1 &= \min\{15 - 7,17 = 7,83; 15,83 - 10 = 5,83\} = 5,83 \\
 t_2^1 &= 22 - 2,17 = 19,83 \\
 t_1^1 &= 0
 \end{aligned}$$



Vrijeme završetka projekta je 22 vremenske jedinice.

Kritični put sačinjavaju aktivnosti: A_{13}, A_{35}, A_{56} .

1.

Postoje mnogi drugi oblici matematičkih modela:

- Realni sistemi sa odgovarajućim etapama funkcionisanja opisuju se modelima dinamičkog programiranja.
- Modeli redova čekanja razmatraju priliv klijenata u određeni sistem i pružanje odgovarajućih usluga.
- Na primjeru proizvodnih sistema i uslužnih sistema razmatraju se modeli zaliha za odgovarajuće materijale, odnosno proizvode.
- Teorija grafova ima posebnu praktičnu primjenu za organizaciju i planiranje kompleksnih projekata (tzv. tehnika mrežnog planiranja) sa osnovnim ciljem da se sa raspoloživim resursima minimizira trajanje projekata koji čine odgovarajuće aktivnosti. Kasnije pokazujemo da se mogu uvoditi i drugi kriteriji, posebno ako se istovremeno razmatra više kriterija.
- Kada neki parametri nisu determinističke prirode već se koriste procijenjene vrijednosti, nastaju stohastički modeli. To mogu da budu linearni modeli sa stohastičkim veličinama za koeficijente uz nepoznate u $f(x)$, slobodne članove u ograničenjima ili parametre na lijevim stranama ograničenja. Za mrežno planiranje su razvijene dvije metode:



CPM (Critical Path Method) za determinističko trajanje aktivnosti i
PERT (Programme Evaluation and Reviews Technique) za stohastičko trajanje aktivnosti.

- Teorija rasplinutih ili fazi skupova nalazi sve veću primjenu u realnim problemima sa tipovima neodređenosti koji su drugačiji od odnosa broja povoljnih i nepovoljnih ishoda iz teorije vjerovatnoće. Za mjeru neodređenosti se koristi stepen ispunjenosti nekih uvjeta, odnosno stepen pripadnosti posmatranog elementa datom skupu.“(Krčevinac i dr.,2002.)

3. ZAKLJUČAK

Modeli optimizacije omogućavaju nalaženje najboljih rješenja različitih vrsta problema. Najčešće su to poslovni projekti čiji je cilj postizanje najveće dobiti uz odgovarajuća ograničenja. Ograničenja su vezana za vrijeme izvršavanja, finansiranje, resurse, broj radnika i slično.

U ovom radu smo opisali i praktično primijenili neke matematičke modele na konkretnim projektima. Potrebno je naglasiti da se matematičkom analizom mogu dobiti različita rješenja za realizaciju projekta, ali da konačnu odluku o tome koje rješenje će se realizirati donosi donosilac odluka u preduzeću. Donošenje te odluke ovisi o prioritetima koji se moraju poštovati tokom realizacije projekta. Kroz pronalazak različitih rješenja smo pokazali kako skraćivanje vremena izvršavanja projekta utiče na količinu potrebnih resursa i došli do zaključka da su to dvije obrnuto proporcionalne veličine. Također, uvidom u domaću literaturu i dostupnu stranu literaturu pokazalo su da se u teoriji uglavnom razmatra minimizacija vremena trajanja projekta sa raspoloživom radnom snagom, mehanizacijom i sličnim resursima čije se angažovanje iskazuje brojem jedinica resursa ili sati rada resursa u jedinici vremena projekta.

Budući da ne postoji idealno, već samo optimalno rješenje, bilo koji odabrani model će imati određene nedostatke. Modeli se prave zbog donošenja odluka vezanih za projekte koji će se realizirati u bližoj ili daljoj budućnosti, pa se procjena vrijednosti parametara mora temeljiti na predviđanju njihovih budućih vrijednosti, što dovodi do pogrešaka.

LITERATURA

- [1] Kalpić, D., Mornar, V. *Operacijska istraživanja*, DRIP, Zagreb, 1996.
- [2] Krčevinac, S. i dr., *Operaciona istraživanja 1 i 2*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2002.
- [3] Lock, D., *Project Management*, Gower Press, London, 1977.
- [4] Nikolić, I., *Procesi upravljanja projektom i projektima: višekriterijumski aspekti*. Zbornik radova, DQM-2005 – 8. Međunarodna konferencija – Upravljanje kvalitetom i pouzdanosću, str. 110-122., Beograd, 15-16 juni 2005.
- [5] Vujošević, M., *Operaciona istraživanja – Izabrana poglavlja*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 1999.