Stručni članak

REDUKCIJA SIMETRIJA HAMILTON-JAKOBI-BELMANOVE JEDNAČINE

Prof. dr. Husnija Bibuljica; email: husnija.bibuljica@unhz.eu
Prof. dr. Sead Rešić, email: sresic@hotmail.com
Ass prof Samira Aganović; e-mail: samira.aganovic@rtvfbih.ba
Fakultet računarskih Nauka-PIM Istočno Sarajevo

Sažetak: Određujemo rješenja nelinearne Hamilton-Jacobi-Bellmanove jednadžbe koja nastaje u modeliranju hedžinga srednje varijanse pod uvjetom terminalnog uvjeta. Prvo uspostavljamo one oblike jednadžbe koji dopuštaju maksimalan broj simetrija Lieve tačke, a zatim svaki redom ispitujemo. Pokazujemo da je Liejeva metoda prikladna samo za jednadžbu maksimalne simetrije. Ukazujemo na primjenjivost metode na slučajeve u kojima parametarska funkcija ovisi i o vremenu.
Ključne riječi: nelinearna Hamilton-Jacobi-Bellmanove jednadžba, Lieva tačka, Liejeva metoda

REDUCTION OF SYMMETRIES OF THE HAMILTON-JAKOBI-BELMAN EQUATION

Abstract: We determine the solutions of the nonlinear Hamilton-Jacobi-Bellman equation that arises in the mean-variance hedging modeling under the condition of the terminal condition. First, we establish those forms of the equation that allow the maximum number of symmetries of the Lie point, and then we examine each one in turn. We show that Lie's method is suitable only for the maximal symmetry equation. We point out the applicability of the method to cases in which the parametric function also depends on time.
Key words: nonlinear Hamilton-Jacobi-Bellman equation, Lie's point, Lie's method

1. Uvod

Ranih sedamdesetih godina u ekonomskom modeliranju dogodila se revolucija koju su pokrenule ideje Samuelsona, Mogdiglianija , Mertona, Blacka i Scholesa. Glavni korak bilo je formalno uvođenje koncepata stohastičkog računa u ekonometriju. Iako je prvobitna koncepcija bila Samuelsonova, prvobitno kontroverzni rad Black and Scholesa [3] čvrsto je ugradio ovaj rad u finansijsku ekonomiju. Nakon toga je došlo do prave eksplozije rada na ovoj temi do te mjere da se ova oblast odvojila i postala finansijska matematika. Black-Scholesova jednačina je evolucijska jednačina iste klase ekvivalencije kao Schrodingerova jednačina i jednačina difuzije. Ovo nije iznenađujuće budući da su sva tri arhetipska modela koji se bave slučajnim fenomenima u specifičnom kontekstu, finansijama, kretanju čestica i disperziji. U svakom od ovih slučajeva tokom modeliranja procedurom slučajnost inkorporirana u model postaje deterministička. 'Metoda usrednjavanja' u originalnom Black-Scholesovom radu bila je da se formira portfolio bez rizika i tako eliminiše slučajna komponenta vladajuće Ito jednačine. Klasična derivacija jednačine topline definira temperaturu koja se odnosi na dinamiku interaktivne čestice unutar fizičkog medija, dok Schrodingerova jednačina definira deterministički nerelativistički kvantnomehanički opis distribucije vjerovatnoće čestice. Svakoj Itˆo jednadžbi pridružuje se odgovarajuća Fokker-Planck ili Feynman- Kac parcijalna diferencijalna jednačina2. Na primjer, Itˆo jednačina koja opisuje kretanje slobodne čestice u jednoj prostornoj dimenziji pod dejstvom konstantnog šuma je

$$dX_t = \sigma^2 dW_t$$

Ovo odgovara jednadžbi difuzije

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

u slučaju da je σ 2 = 1. Općenito ta jednadžba koja upravlja procesom u jednoj tački,

$$dX_t = \mu(x,t)\, dt + \sigma(x,t) dW_t$$

ima deterministički pandan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

ili

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r(x,t)u$$

u verziji Fokker-Planck i Feynman- Kac . Girsanov teorem u stohastičkom proračunu implicira da se pod promjenom mjere i time indukovanom promjenom Brownovog kretanja W može proizvoljno modificirati pomak μ(x, t) Ito jednačine. U slučaju da se potpuno eliminiše drift , vraća se jednačina slobodne čestice Itˆo . Prirodna generalizacija bi bila da se klase Fokker-Planck i Feynmann-Kac parcijalnih diferencijalnih jednačina mogu preslikati u varijante jednačine difuzije. Nadalje, odnos prema evolucijskim jednadžbama općenito se stavlja u kontekst interpretacijom generatora Itˆo procesa,

$$\lim_{h\to 0} = E[\frac{f(X_{t+h},t) - f(X_t,t)}{h} | X_t = x] = \mathscr{L}\chi f$$

gdje je

$$\mathscr{L}\chi \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \sigma^2(x,t)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

kao očekivana stopa promjene funkcije slučajne varijable. Obično su ove ideje prikazane u Black-Scholes jednadžbi. Black-Scholesova jednadžba može se izvesti na tri načina, od kojih je svaki pojedinačno bogat izvor parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u ekonomiji i financijama, originalni pristup hedžingu, pristup martingalu i još jedan [11][p 601] koji izvodi jednačinu kao Hamilton-Jacobi-Bellman rješenje za stohastički kontrolni problem u modelu kamatnih stopa. Za Black-Scholesa postoji bezbroj veza između ovih pristupa, Feynmann-Kac teorema, postojanost Itˆo generatora budući da je opcija funkcija cijene dionice i cijena dionice slijedi geometrijsko Brownovo kretanje, argument bez arbitraže, koji je sličan zakonu očuvanja po tome što kaže da se u prosjeku vrijednost opcije ponaša na isti način kao instrument bez rizika, a očito i sama jednačina. Klasa Hamilton-Jacobi-Bellmanovih jednačina nastaje u sferi stohastičke teorije upravljanja [12]. Tipičan problem je minimizirati indeks,

$$J = \min_{u\in U} E_t \left\{ \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) \right\} d\tau,$$

s obzirom na stohastička ograničenja,

$$dX = \mu(X(t), u(t))\, dt + \sigma(X(t), u(t))\, dW$$

preko prostora vjerovatnoće (Ω, F, P) i dozvoljenih kontrola u ∈U. Ovo ima optimalno rješenje, f, dato u (1 + 1)-dimenzionalni slučaj po parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \min_{u\in U}[\mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + g(x,u)] = 0$$

Minimizacija preko kontrole u ∈U implicira da, ako Pontryaginov princip iz standardnih problema teorije upravljanja, da je na optimalnoj kontroli Hamiltonijan minimiziran u odnosu na kontrolne varijable u, može se pozvati [5] [p 300-307],

$$H = \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + g(x,u)$$

(1.1) ima interpretaciju kao Hamiltonijan, barem heuristički. U ovom radu želimo istražiti svojstva jedne od ovih Hamilton -JacobiBellmanovih jednačina sa stanovišta analize Lie-ove simetrije. Black-Scholesovu jednačinu su prije nekoliko godina ispitivali Ibragimov i Gazizov [9]. U određenom smislu, analiza simetrije Black-Scholesove jednadžbe može se smatrati trivijalnom jer je povezana sa standardnom jednačinom topline putem očigledne transformacije tačaka, a svojstva simetrije i rješenja jednačine topline su predmet udžbenika [4]. Međutim, treba napomenuti da rješenje Black-Scholesove jednadžbe zahtijeva konjukciju njenog terminalnog stanja i terminalni uvjeti se ne prevode dobro u granične i početne uvjete pod transformacijama tačaka. Štaviše, naglasak u radu Ibragimova i Gazizova nije na proračunu simetrija već na konstrukciji osnovnog rješenja što nije trivijalno budući da izračunavanje temeljnog rješenja transformacijom osnovnog rješenja jednačine topline nije jednostavno. . Nadalje, rad sadrži drugi dio koji se bavi Jacobs-Jonesovim dvofaktorskim varijabilnim modelom. Izazov u tretiranju Hamilton-Jacobi-Bellmanovih jednadžbi metodama analize Lie simetrije je da se inkorporiraju uslovi koji se moraju nametnuti rješenjima u jednadžbe koje su u slučaju linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe beskonačne. u broju, imaju svojstvo linearne superpozicije i tako pružaju izglede za razumnu selekciju. Postoje tri načina da se odgovori na ovaj izazov. Jedna metoda, koja se nalazi u literaturi, je uključivanje granica kao dijela problema u određivanju simetrija. Drugi pristup je pokušaj korištenja beskonačnih skupova rješenja koje možemo dobiti za neke probleme – one s razumnom količinom simetrije – i određivanje da li se oni mogu koristiti kao osnovni skup. Treći pristup je da se izračunaju sve simetrije, a zatim da se vidi koje su kombinacije u skladu sa graničnim i početnim/terminalnim uslovima. Sve tri metode imaju svoju relevantnost u različitim kontekstima. U slučaju Schr¨odingerove jednadžbe za ograničavajući potencijal kao što je onaj jednostavnog harmonijskog oscilatora, traži se beskonačni skup rješenja koji će djelovati kao baze jer realizacija stanja mora biti jedna od ovih funkcija. U konstrukciji rješenja bira se onaj beskonačan skup koji je u skladu sa graničnim uslovima. Ovo nije težak posao. To nije slučaj u drugim oblastima primjene, jer u njima priroda graničnih/početnih/terminalnih uslova upada prilično snažnije. Hamilton-Jacobi-Bellman jednadžba kojom želimo da se pozabavimo nije očigledan srodnik Black-Scholes-ove ili toplotne jednačine. Jednačina je

$$\frac{\partial J}{\partial t} + a\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{x}\right)^2 = 0$$

sa terminalnim uvjetom J(T, x) = 0 i predstavljen je od strane Heath et al [8] [p 516] kao jednadžba za zaštitu od srednje varijance. Heath i ostali primjećuju da μ u krajnjem članu (1.2) ne mora biti konstanta. U stvari, bolje je zapisati jednačinu kao

$$\frac{\partial J}{\partial t} + a\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + v(x) = 0$$

kako bi se omogućilo moguća zavisnost μ od x. Pristup koji usvajamo za traženje rješenja (1.3) s njegovim terminalnim uvjetom je onaj da se izračunaju simetrije Lie točke za (1.3) i zatim odredi da li postoji simetrija, ili simetrije, kompatibilne sa terminalnim uvjetom. U slučaju da postoji simetrija, rješenje sličnosti se može odrediti na uobičajen način kao što ćemo pokazati u nastavku. Ovaj rad je strukturiran na sljedeći način. U sljedećem dijelu ispitujemo (1.3) za simetrije Lie tačke i identificiramo one funkcije, ν(x), za koje postoji dodatna simetrija. U §3 ispitujemo redom te slučajeve i utvrđujemo postojanje ili ne simetrija kompatibilnih sa terminalnim uslovom i dobijamo rješenja u slučaju postojanja. Za one slučajeve u kojima možemo pronaći rješenje, utješno je znati da je rješenje jedinstveno zbog Fokker-Planckove teoreme. Zaključujemo sa nekim komentarima u §4. Naglašavamo da rješenja tražimo kroz metode analize Lie grupe, a posebno analizu zasnovanu na postojanju simetrija Lie tačke. Odsustvo simetrije Lie tačke ne implicira da (1.3), ili bilo koja (1 + 1)-dimenzionalna evolucijska jednadžba, nije integrabilna . Međutim, odsustvo simetrije čini postojanje rješenja zatvorenog oblika malo vjerojatnim.

2. Preliminarna analiza

Analiziramo (1.3) za simetrije Lie tačke koristeći Program LIE [7, 19]. Za generalno ν(x) nalazimo da postoje tri simetrije Lie tačke

$$\Gamma_1 = f(t,x)e^{(-\frac{-J}{b^2})}\partial_J$$

$$\Gamma_2 = \partial_J\ (2.1b)$$

$$\Gamma_3 = \partial_t\ ,(2.1c)$$

gdje je f(t, x) rješenje linearne jednadžbe

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{v(x)}{b^2}f = 0\ (2.1d\ )$$

u kojem je diferencijalni dio samo standardni generator Itˆo procesa. Simetrije (2.1b) i (2.1c) se mogu očekivati zbog nedostatka prisustva J i t u (1.3). Međutim, simetrija (2.1a) u sprezi sa (2.1d) je neočekivana i ukazuje na to da je (1.3) linearisabilna pomoću transformacije tačke. Linearna jednadžba (2.1d) odmah daje trag za potencijalne kandidatske funkcije, ν(x), za koje (1.3) može prikazati bogatiju strukturu simetrije. Podsjećamo [16, 1] da postoji bliska veza između simetrija Lie tačke linearne paraboličke evolucijske jednadžbe i Noetherovih tačaka simetrija povezanih Lagranžijevih sistema. Veza je napravljena direktno između Noether tačaka simetrija Akcionog integrala i dodatnih simetrija Lie tačke odgovarajuće Schr¨odingerove jednačine. Međutim, kada se izvrši prijelaz na Schr¨odingerovu jednačinu, veza se može proširiti na bilo koju evolucijsku jednačinu koja se odnosi na Schr¨odingerovu jednačinu pomoću transformacije tačke. Konkretno, transformacija t −→ it koja pretvara Schr¨odingerovu jednačinu u toplotnu jednačinu održava simetriju Lie tačke i kada je prijelaz napravljen, Black-Scholesova jednačina i drugi iz finansijske matematike su povezani u jedan pristup simetriji. U slučaju standardnog Lagranžiana

$$L = \frac{1}{2} x'^2 - V\,(t, x) \; (2.2)$$

i njegove odgovarajuće vremenski zavisne Schr¨odingerove jednadžbe

$$2i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V\,(t, x\,)u = 0 \; (2.3)$$

Noetherove tačkaste simetrije prvog karakterizira potencijal kao

V	$Brojsimetrija$	$algebra$
$V(t,x)$	0	
$V(x)$	1	A_1
$\omega^2 x^2 + \frac{h^2}{x^2}$	3	$sl(2,R)$
$\mu^2 + \frac{h^2}{x^2}$	3	$sl(2,R)$
$\omega^2 x^2$	5	$sl(2,R) \oplus_s 2A_1$
$\mu^2 x$	5	$sl(2,R) \oplus_s 2A_1$
μ^2	5	$sl(2,R) \oplus_s 2A_1$

V nema sim algebre

V (t, x) 0 − V (x) 1 A1 ω 2x 2 + h 2 x 2 3 sl (2, R) µ 2 + h 2 x2 3 sl (2, R) ω 2x 2 5 sl (2, R) ⊕s 2A1 µ 2x 5 sl (2, R) ⊕s 2A1 µ 2 5 sl (2, R) ⊕ $s\ 2A1$ (2.4)

i simetrije Lie tačke potonje pomoću

V	$Brojsimetrija$	$algebra$
$V(t,x)$	$0+1+\infty$	$A_1 \oplus_s \infty A_1$
$V(x)$	$1+1+\infty$	$2A_1 \oplus_s \infty A_1$
$\omega^2 x^2 + \frac{h^2}{x^2}$	$3+1+\infty$	$\{A_1 \oplus \; sl(2,R)\} \oplus_s \infty A_1$
$\mu^2 + \frac{h^2}{x^2}$	$3+1+\infty$	$\{A_1 \oplus \; sl(2,R)\} \oplus_s \infty A_1$
$\omega^2 x^2$	$5+1+\infty$	$\{sl(2,R) \oplus_s W\} \oplus_s \infty A_1$
$\mu^2 x$	$5+1+\infty$	$\{sl(2,R) \oplus_s W\} \oplus_s \infty A_1$
μ^2	$5+1+\infty$	$\{sl(2,R) \oplus_s W\} \oplus_s \infty A_1$

V bez sim algebre

V (t, x) 0 + 1 + ∞ A1 ⊕s ∞ A1 V (x) 1 + 1 + ∞ 2A1 ⊕s ∞ A1 ω 2x 2 + h 2 x 2 3 + 1 + ∞ {A1 ⊕ sl (2, R)} ⊕s ∞ A1 μ 2 + h 2 x 2 3 + 1 + ∞ {A1 ⊕ sl (2, R)} ⊕s ∞ A1 ω 2x 2 5 + 1 + ∞ { sl (2, R) ⊕s W} ⊕s ∞ A1 μ 2x 5 + 1 + ∞ { sl (2, R) ⊕s W} ⊕s ∞ A1 μ 2 5 + 1 + ∞ { sl (2, R) ⊕s W} ⊕s ∞ A1, (2.5)

gdje je W Heisenberg - Weylova algebra sa

$$[\Sigma_1, \Sigma_2]_{LB} = 0, [\Sigma_1, \Sigma_3]_{LB} = 0, [\Sigma_2, \Sigma_3]_{LB} = \Sigma_1$$

u kojem se naglašava da su svojstva iskazana do transformacije ekvivalencije

$$x \to \frac{x - \alpha(t)}{\rho(t)}, t \to \int \rho^{-2}(t)dt$$

u klasičnom kontekstu i prirodno povezana transformacija Schr¨odingerove jednadžbe [13, 14]. U (1.3), zbog (2.1d), ν(x) igra ulogu potencijala. Kao posljedica toga, iz (2.5) shvaćamo da postoji nekoliko slučajeva za koje bi dodatna simetrija mogla dovesti do rješenja sličnosti (1.3) kompatibilnog s terminalnim uvjetom. Naravno, na početku bismo trebali razmotriti najopštiji slučaj u kojem su simetrije Lie tačke one iz (2.1). Terminalni uslov J(T, x) = 0 je u stvari dvostruki uslov, jer se, kako se prisećamo, sve varijable smatraju nezavisnim u Lievoj analizi u svrhu parcijalne diferencijacije. Dakle, moramo ispuniti dualne uslove

$$t = TiJ = 0 \ (2.6)$$

U slučaju potonjeg, prvo se također primjenjuje. Ako uzmemo opštu simetriju (koja je zaista simetrija Lie-ove tačke jednadžbe; u analizi razdvajamo simetriju sa n parametara na n simetrija sa jednim parametrom jer ovo otvara mogućnost razmatranja algebarske strukture simetrija; ako simetriju posmatramo kao n-parametarski diferencijalni operator, teško je konstruirati algebru simetrije sa samim sobom),

$$\Gamma = a_1\partial_J + a_2\partial_t, (2.7)$$

zahtjevi (2.6) inzistiraju da je

$$a2 = 0 \ ia1 = 0. (2.8)$$

Ovo nije recept za simetričan napredak! Uzimamo u obzir posebne 'potencijale' (2.4) i (2.5). Zauzvrat, ν(x) stavljamo kao posebnu funkciju klasa navedenih u (2.4) i (2.5) da odredimo simetrije. Zatim istražujemo mogućnost da su određene reprezentacije kompatibilne s terminalnim uvjetom. U slučajevima kada je tako, određujemo rješenje sličnosti.

3. Simetrije i rješenja

Počinjemo s 'potencijalima' koji omogućavaju najveću količinu simetrije.

$\mathbf{3.1 Slučaj v(x) = \mu^2}$

Simetrije su

$$\Gamma_1 = f(t,x)e^{[\frac{J}{b^2}]}\partial_J$$

$$\Gamma_2 = \partial_J$$

$$\Gamma_3 = \partial_t$$

$$\Gamma_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}(x + at)\partial_x + \mu^2 t\partial_J \ (3.1)$$

$$\Gamma_5 = t^2\partial_t + tx\partial_x + \frac{1}{2}(b^2 t - 2\mu^2 tx - (x - at)^2)\partial_J$$

$$\Gamma_6 = \partial_x$$

$$\Gamma_7 = t\partial_x - (x - at)\partial_J ,$$

gdje je f(t, x) rješenje

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mu^2}{b^2}f = 0 \ (3.2)$$

Opća simetrija Lie tačke (1.3) sa ν(x) = μ 2 je

$$\Gamma = \sum_{2}^{7} a_i\Gamma_i \ \ (3.3)$$

gdje su ai , i = 2, 7 konstante koje treba odrediti. Primjena Γ na terminal, tj . t = T, daje

$$a_3 + a_4 T + a_5 T^2 = 0 \ (3.4),$$

a na sam terminalni uvjet daje

$$a_2 + a_4\mu^2 T + \frac{1}{2}a_5\left(b^2 T - 2\mu^2 Tx - (x - aT)^2\right) - a_7(x - aT) = 0. \ (3.5)$$

Iz (3.5) dobijamo tri relacije, odnosno

$$x^2 a5 = 0$$

$$xa_7 = 0$$

$$-a_2 + a_4\mu^2 T = 0$$

i iz (3.4) imamo $a_3 + a_4 T = 0$ odakle je

$$a_2 = -a_4\mu^2 T, a_3 = -a_4 T \ (3.6)$$

tako da nalazimo da su sistem jednadžbi i terminalni uvjet invarijantni prema dvije simetrije Lie tačke

$$\Lambda_1 = \partial_x$$

$$\Lambda_2 = (T - t)\partial_t + \mu^2(T - t)\partial_J . (3.7)$$

Sada možemo tražiti rješenje sličnosti (1.3) sa $\nu(x) = \mu^2$ koje je kompatibilno sa datim terminalnim uvjetom. Invarijantnost prema Λ_1 znači da je

$J = J(t)$ samo.

Pridruženi Lagrangeov sistem od Λ2 je

$$\frac{dt}{T-t} = \frac{dJ}{\mu^2(T-t)}$$

Dakle karakteristika je$\omega = J - \mu^2 t. Iz$ (1.3) $sa\nu(x) = \mu^2$

dobijamo rešenje sličnosti $J = K - \mu^2 t$ tako da je rešenje koje je konzistentno sa terminalnim uslovom

$$J = \mu^2(T-t). \text{(3.8)}$$

$$\mathbf{3.2 Slučaj \nu(x) = \mu^2 x}$$

Dobija se isti broj simetrija. One imaju izraze

$$\Gamma_1 = f(t,x)e^{[\frac{J}{b^2}]}\partial_J$$

$$\Gamma_2 = \partial_J$$

$$\Gamma_3 = \partial_t$$

$$\Gamma_4 = \partial_x - \mu^2 t\partial_J \text{ (3.9)}$$

$$\Gamma_5 = t\partial_x + (at - \frac{1}{2}\mu^2 t^2 - x)\partial_J$$

$$\Gamma_6 = 2t\partial_t + \left(at + x + \frac{3}{2}\mu^2 t^2\right)\partial_x + \mu^2\left(at^2 - 3tx - \frac{1}{2}\mu^2 t^3\right)\partial_J$$

$$\Gamma_7 = 2t^2\partial_t + (2tx + \mu^2 t^3)\partial_x + \left(b^2 t + \mu^2 a t^3 - 3\mu^2 t^2 x - (x-at)^2 - \frac{1}{4}\mu^4 t^4\right)\partial_J,$$

gdje je f(t, x) rješenje

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mu^2}{b^2}xf = 0. \text{(3.10)}$$

Uzimamo opštu kombinaciju simetrija iz (3.3) i primenjujemo je na terminalni uslov (2.6).Prva od (2.6) daje

$$a_3 + 2Ta_6 + 2T^2 a_7 = 0 \text{ (3.11)}$$

i drugi

$$a_2 - \mu^2 T a_4 + \left(aT - \frac{1}{2}\mu^2 T^2 - x\right) a_5 + \left(\mu^2 a T^2 - 3\mu^2 T x - \frac{1}{2}\mu^4 T^3\right) a_6 + (2aTx + \mu^2 a T^3 - 3\mu^2 T^2 x - a^2 t^2 + b^2 T - x^2 - \frac{1}{4}\mu^4 T^4) a_7 = 0. (3.12)$$

U (3.12) x je varijabla, koeficijenti potencija x su odvojeno nula i dobijamo tri uslova

$$x\ 2 : a7 = 0\ x : a5 = -3\mu\ 2Ta6\ (3.13) -: a2 = \mu\ 2Ta4 + 2\mu\ 2\ aT2 - \mu\ 4T\ 3\ a6$$

tako da imamo dvoparametarsku (a4 i a6 su parametri) simetriju koja je u skladu sa terminalnim uslovom (2.6). Ovu simetriju pišemo kao dvije jednoparametarske simetrije

$$\Sigma 1 = \partial x - \mu\ 2\ (t - T)\partial J\ (3.14a)\ \Sigma 2 = 2(t - T)t + at + x + 3\ 2\ \mu\ 2\ t\ 2 - 3\mu\ 2\ tT\partial x + \mu\ 2\ (t - T)\ a(t - 2T) - 1\ 2\ \mu\ 2\ t\ 2 - 2tT - 2T\ 2 - 3x\partial J\ .(3.14b)$$

Napominjemo da je [Σ1, Σ2]LB = Σ1, tj . Σ1 normalna podgrupa koja pojačava privlačnost jednostavnosti Σ1 za korištenje za određivanje rješenja sličnosti. Invarijante (3.14a) određene su rješenjem pridruženog Lagrangeovog sistema

$$dt\ 0 = dx - 1 - T = dT\mu 2\ (t$$

i su t i J + μ 2 (t − T)x

pa da vidimo rješenje sličnosti oblika

J(t, x) = f(t) − μ 2 (t − T)x. (3.16)

Ovo zamjenjujemo u

$$\partial J\partial t + a\partial J\partial x + 1\ 2\ b\ 2\ \partial\ 2J\partial x2 - 1\ 2\ \partial J\partial x\ 2 + \mu\ 2x = 0\ (3.17)$$

da nađemo da je

$$f(t) = K + 1\ 2\ a\mu\ 2\ (t - T)\ 2 + 1\ 6\ \mu\ 4\ (t - T)\ 3\ , (3.18)$$

gdje je K konstanta integracije koja je nula kada se primjenjuje terminalni uvjet.Tako je rješenje sličnosti koje odgovara

$$\Sigma 1\ J(t, x) = 1\ 2\ a\mu\ 2\ (t - T)\ 2 + 1\ 6\ \mu\ 4\ (t - T)\ 3 - \mu\ 2\ (t - T)x\ (3.19)$$

Primjena Σ2 na (3.19) je identitet, tj . (3.19) je rješenje sličnosti zajedničko za obje simetrije koje zadovoljavaju terminalni uslov (2.6)

$\mathbf{3.3.}$ $\boldsymbol{Slučaj v(x) = 12\omega 2x2}$

LIE vraća simetrije

$$\Gamma 1 = f(t, x)\ exp\ [J/b2\ ]\partial J$$

$$\Gamma 2 = \partial J$$

$$\Gamma 3 = \partial t$$

$$\Gamma 4 = exp\ [\ \omega t\ ]\ [\partial x + (a - \omega x)\partial J]\ (3.20)$$

$$\Gamma 5 = exp\,[-\omega t\,]\,[\partial x + (a + \omega x\,)\partial J\,]$$

$$\Gamma 6 = exp\,[2\omega t]\,\partial t + \omega x\partial x + a\omega x - 1\,2\,a\,2 + 1\,2\,\omega b\,2 - \omega\,2x\,2\,\partial J$$

$$\Gamma 7 = exp\,[-2\omega t]\,\partial t - \omega x\partial x - a\omega x + 1\,2\,a\,2 + 1\,2\,\omega b\,2 + \partial J\,,$$

gdje je f(t, x) rješenje

$$\partial f\partial t + 1\,2\,b\,2\,\partial\,2f\partial x2 + a\partial f\partial x - 1\,2\,\omega\,2\,b\,2\,x\,2\,f = 0.(3.21)$$

Kada ako ispitamo (1.3) sa ν(x) = 1 2 ω 2x 2 , shvatamo da je prvi slučaj (ν(x) = μ 2) koji se razmatra bio donekle specifičan za analizu sadašnjeg slučaja, po svojoj strukturi liči na slučaj 2. njegove detalje. Stoga možemo jednostavno istaknuti glavne korake. Primjena opće simetrije (3.3) na terminalni uvjet (2.6) dovodi do dvije simetrije

$$\Sigma 1 = cosh\omega(t-T)\partial x + [a(\,cosh\omega(t-T) - 1) - \omega x sinh\omega(t-T)]\,\partial J\;(3.22a)$$

$$\Sigma 2 = sinh\,2\omega(t-T)\partial t + [aexp\,[\omega(t-T)] + \omega x cosh\,2\omega(t-T)]\,\partial x + a(a - \omega x\,)\,exp\,[\omega(t-T)] - a\,2 - 1\,2\,\omega b\,2 + a\omega x + 1\,2\,\omega b\,2\,cosh\,2\omega(t-T) - 1\,2\,a\,2 + \omega\,2x\,2\,sinh\,2\omega(t-T)\,J\,.(3.22b)$$

Opet smo favorizirani sudbom po tome što Laževa zagrada od Σ1 i Σ2 daje ωΣ1 i koristimo Σ1 da odredimo rješenje sličnosti koje je

$$J(t,x) = ax\,[1 - sech\omega\,(t-T)] + 1\,2\omega a\,2 - \omega\,2x\,2\,tanh\omega(t-T) + 1\,2\,b\,2\,logcosh\omega(t-T) - 1\,2\,a\,2\,(t-T)\;(3.23\,)$$

Nakon ne malo proračuna nalazi se da Σ2 poništava rješenje (3.23) i opet imamo samo jedno rješenje. U sva tri slučaja jedno rješenje je jedinstveno rješenje kako je predviđeno FokkerPlanck teoremom . Zanimljivo je kako dva različita pristupa.

3.4. $\boldsymbol{Slučajv(x) = 12\mu 2x2}$

Ovaj 'potencijal' ima bogatu istoriju koja datira još od vrijeme Newtona i njegovog mladog kolege Cotesa i javlja se u novijim aspektima kao Ermakov sistem [6] i Ermakov-Pinneyeva jednadžba [18]. Odnos potonjeg i prvog nedavno je istaknut [15]. Jednačina

$$\partial J\partial t + a\partial J\partial x + 1\,2\,b\,2\,\partial\,2J\partial x2 - 1\,2\,\partial J\partial x\,2 + 1\,2\,\mu\,2\,x2 = 0\;(3.24)$$

posjeduje simetriju Lijeve tačke (Γt symmetries) , x)

exp [−J/b2]∂J

$$\Gamma 2 = \partial J$$

$$\Gamma 3 = \partial t\;(3.25)$$

$$\Gamma 4 = 2t\partial t + x\partial x + ax - a\,2\,t\partial u$$

$$\Gamma 5 = 2t\,2\,\partial t + 2tx\partial + b\,2\,t - (x - at)\,2\,\partial J$$

, gdje je f(t, x) rješenje

$$\partial f\partial t + 1\,2\,b\,2\,\partial\,2f\partial x2 + a\partial f\partial x - 1\,2\,\mu\,2\,b\,2x\,2\,f = 0.(3.26)$$

Terminalni uslov (2.6) proizvodi dva uslova

$$a3 \, + \, 2Ta4 \, + \, 2T\,2\,a5 \, = \, 0\,(3.27a)$$

$$a2 \, + \, (ax - a\,2T\,)a4 \, + \, 2aTx - a\,2T\,2 \, + \, b\,2T - x\,2\,a5 \, = \, 0\,(3.27b)$$

i (3.27b) razdvaja u tri odvojena uslova tako da četiri parametra a2 – a5 zadovoljavaju četvorodimenzionalni homogeni sistem zasnovan na četiri linearno nezavisne simetrije. Nije iznenađujuće da postoji samo trivijalno rješenje tako da ne postoji rješenje sličnosti za (1.2) kada je µ konst .

$\mathbf{3.5.} \boldsymbol{Slučajv(x) \, = \, 12\omega 2x2 \, + \, 12\mu 2x2I}$

U mehanici ovo je klasični Ermakov potencijal u kojem je ω ω(t) i o kojem postoji vrlo bogata literatura. U sadašnjem kontekstu nalazimo simetrije Lie tačke

$$\Gamma 1 \, = \, f(t,x)\, exp\,[J/b2\,]\partial J$$

$$\Gamma 2 \, = \, \partial J$$

$$\Gamma 3 \, = \, \partial t\,(3.28)$$

$$\Gamma 4 \, = \, exp\,[2\omega t]\,\partial t \, + \, \omega x \partial x \, + \, a\omega x \, - \, 1\,2\,a\,2 \, + \, 1\,2\,\omega b\,2 \, - \, \omega\,2x\,2\,\partial J$$

$$\Gamma 5 \, = \, exp\,[-2\omega t]\,\partial t \, - \, \omega x \partial x \, - \, a\omega x \, + \, 1\,2\,a\,2 \, + \, 1\,2\,\omega b\,2 \, + \, \omega\,2x\,,$$

gdje je f(t, x) je rješenje

$$\partial f\,\partial t \, + \, 1\,2\,b\,2\,\partial\,2f\,\partial x2 \, + \, a\,\partial f\,\partial x \, - \, 1\,2\,\omega\,2\,b\,2\,x\,2 \, + \, \mu\,2\,b\,2x\,2\,f \, = \, 0.\,(3.29\,)$$

Kao iu prethodnom slučaju ne postoji simetrija koja je kompatibilna sa terminalnim uslovom, (2.6).

$\mathbf{3.6.} \boldsymbol{Slučaj\, v(x) \, = \, \omega\,2 \, + \, 1\,2\,\mu\,2\,x\,2}$

Simetrije Lijeve tačke su

$$\Gamma 1 \, = \, f(\,t,x)\, exp\,[-J/b2\,]\partial J$$

$$\Gamma 2 \, = \, \partial J$$

$$\Gamma 3 \, = \, \partial t\,(3.30)$$

$$\Gamma 4 \, = \, 2t\partial t \, + \, x\partial x \, + \, ax \, - \, a\,2\,t2\omega\,2\,t\,\partial u$$

$$\Gamma 5 \, = \, 2t\,2\,\partial t \, + \, 2tx\partial x \, + \, b\,2\,t \, - \, (x \, - \, at)\,2\,\partial J\,.$$

Možda nije iznenađujuće da simetrije također nisu kompatibilne s terminalnim uvjetom (2.6).

$\mathbf{3.7.} \boldsymbol{Slučaj\, v(x) \, = \, \omega\,2x \, + \, 1\,2\,\mu\,2\,x\,2}$

Ovaj slučaj je još gori od prethodna tri jer su dobijene samo tri opšte simetrije (2.1) i već smo vidjeli da su te simetrije nekompatibilne sa terminalno stanje (2.6). 4 Diskusija Ispitali smo jednadžbu zaštite od srednje varijanse koju su predložili Heath et al za postojanje rješenja sličnosti zasnovanih na simetrijama nelinearne evolucijske jednadžbe tipa Hamilton-Jacobi-

Bellman modelirajući proces koji su u skladu s 280 V Naicker , K Andriopoulos i PGL Leach terminalno stanje za model. Postoje tri slučaja za koja možemo dobiti jedinstveno rješenje za problem

$$\partial J\, \partial t \;+\; a\, \partial J\, \partial x \;+\; 1\, 2\, b\, 2\, \partial\, 2J\, \partial x2 \;-\; 1\, 2\, \partial J\, \partial x\, 2 \;+\; \nu(x) \;=\; 0\, J(\,T, x) \;=\; 0 \;(4.1)$$

pomoću tehnika analize Lijeve simetrije i one su kada ν(x) ima jedan od oblika μ 2 , μ 2x ili 1 2 ω 2x 2 . U standardnom prikazu (4.1) ν(x) je zapisano kao μ 2/x2 i vidjeli smo da za konstantu μ 6= 0 u ovom obliku ne može postojati rješenje sličnosti jer postojeće simetrije Lie tačke jednadžbe ne mogu odgovarati sa terminalnim stanjem. Svi oblici (1.3) sa (2.6) koji su se mogli riješiti tehnikom Lie-ove simetrijske analize bili su maksimalne simetrije tačke za (1 + 1) evolucijsku jednačinu. Iako se spekuliralo nešto slično kaosu za (1+nekoliko) evolucijskih jednačina [1], ne očekuje se da će se naći takva nepravilnost u (1 + 1) jednadžbi, tj . očekuje se da će jednačina biti integrabilna čak i ako nije moguće pronaći rješenje u nečemu što se približava zatvorenom obliku jednostavno zbog odsustva dovoljne simetrije. Ovo nas onda vraća na čitavo pitanje koje simetrije – potencijalne, neklasične , šta imate – treba uzeti u obzir. Ovdje smo ograničili našu pažnju na simetrije Lieovih tačaka jer ovo omogućava da se napravi spremna veza sa tradicionalnim područjima klasične mehanike i kvantne mehanike. Očigledno da postoji prostor za dalje istraživanje ove teme kroz opštije oblike simetrije. Analiza Lijeve simetrije (1.3) za općenito ν(x) bila je prilično otkrivajuća jer je pokazala da postoji beskonačan broj simetrija 'rješenja' i to ukazuje na linearizirajuću transformaciju. Zaista, u ovom slučaju, ako pogledamo beskonačnu klasu simetrija Lie tačke, nalazimo ključ za linearizirajuću transformaciju budući da je

$$\Gamma 1 \;=\; exp\, J(\,t, x)/b2\, f(t, x)\partial J \;=\; -bf(t, x)\partial\; exp\; - J(t, x)/b2 \;(4.2)$$

i tako se može vidjeti da je transformacija u = exp − J(t, x)/b2 dovodi Γ1 u standardni oblik simetrije rješenja. U tom procesu čini Γ2 simetriju homogenosti karakterističnu za linearne jednačine svih provenijencija. Tip 'potencijala', ν(x), koji smo razmatrali u različitim slučajevima, bio je autonoman. U klasičnoj mehanici je dobro poznato da se neki neautonomni potencijali mogu jednako tretirati bez gubitka općenitosti. Uspješni 'potencijali' iz §3 bili su μ 2 , μ 2x i 1 2 ω 2x 2 . Klasično, prva nema uticaja jer konstanta dodana Lagranžijanu ne čini nikakvu razliku u Euler-Lagrangeovim jednačinama kretanja. Drugi predstavlja kretanje pod uticajem jednolikog gravitacionog polja `a la Galileo, a treći je jednostavni harmonijski oscilator. Ne bi se očekivalo da zamjena μ sa μ(t) ili ω sa ω(t) napravi teorijsku razliku u stepenu težine rješenja sistema iako se zna da su praktične komplikacije proizvele izdašnu literaturu. Međutim, da li bi takva generalizacija utjecala na terminalno stanje? Razmatramo slučaj ν(t, x) = μ 2 (t) da bismo dali aromu situacije. Simetrije Lie tačke su

$$\Gamma 1 \;=\; f(t, x)\; exp\; [J/b2\,]\partial J$$

$$\Gamma 2 \;=\; \partial J$$

$$\Gamma 3 \;=\; \partial x$$

$$\Gamma 4 \;=\; \partial t \;- \mu\, 2\; (t)\partial J \;(4.3)$$

$$\Gamma 5 \;=\; t\partial x \;+\; (at \;-\; x)\partial J$$

$$\Gamma 6 = 2t\partial t + (at + x)\partial x - 2t\mu 2\,(t)\partial J$$

$$\Gamma 7 = 2t\,2\,\partial t + 2tx\partial x + b\,2\,t - 2t\,2\mu\,2\,(t) - (x - at)2\,\partial J,$$

gdje je f(t, x) rješenje

$$\partial f\,\partial t + 1\,2\,b\,2\,\partial\,2f\,\partial x2 + a\,\partial f\,\partial x - \mu\,2\,(t)\,b\,2\,f = 0.(4.4)$$

Napominjemo da je (4.4) u suštini isto kao (3.2), ali da je došlo do nekih promjena u simetrijama u odnosu na one date u (3.1). Terminalni uslov nameće ograničenja

$$a4 + 2T\,a6 + 2T\,a7 = 0\,(4.5a)$$

$$a2 - \mu\,2\,(T\,)a4 + (\,aT - x)a5 - 2T\,\mu 2\,(T)a6 + (2aT\,x - a\,2T\,2 + b\,2T - x\,2 - 2T\,2\mu\,2\,(T))a7 = 0\,(4.5b)$$

na koeficijente opšte simetrije (3.3). U (4.5b) x 2 u koeficijentu a7 nameće da je a7 = 0. Zatim slijedi da je a5 = 0. Kada zamijenimo a4 iz (4.5a) u ono što je ostalo od (4.5b), nalazimo da a2 = 0. Ipak, još uvijek imamo dvije proizvoljne konstante i dvije simetrije kompatibilne sa terminalnim uvjetom su

$$\Sigma 1 = \partial x\,(4.6a)$$

$$\Sigma 2 = 2(t - T)\,\partial t - \mu\,2\,(t\,)J\,.(4.6b)$$

Iz (4.6a) je evidentno da je J = f(t) i da je integracija (1.3) sa ν(t) = μ 2 (t) trivijalna. Imamo

$$J = K - Z\,t\,t0\,\mu(s)\,2\,ds = ZT\,t0\,\mu(s)\,2ds - Z\,t\,t0\,\mu(s)\,2ds\,(4.7)$$

kada se konstanta procijeni korištenjem terminalnog uvjeta. Djelovanje druge simetrije daje identitet. Zabavno je primijetiti da Σ2 nestaje u terminalnom vremenu. Tako vidimo da se analiza može uspješno proširiti na situaciju koja je eksplicitno zavisna od vremena .

Zaključak

U ovom radu smo sa stanovišta analize simetrije Lie tačke ispitali jednačinu za zaštitu od srednje varijanse koja sadrži parametarsku funkciju u zavisnosti od cijene osnovnog objekta. Za tri verzije parametarske funkcije uspjeli smo dobiti jedinstveno rješenje jednačine plus terminalni uvjet. Tri funkcije koje su priznale rješenje bile su one koje su davale maksimalan skup simetrija Lie tačke za nelinearnu evolucijsku jednačinu korištenu za modeliranje fenomena. U procesu je Liejeva analiza otkrila da je jednadžba linearisabilna zbog na postojanje beskonačnog broja simetrija 'rješenja', tzv. jer su koeficijentne funkcije simetrija rješenja diferencijalne jednadžbe.

U slučaju linearnih jednadžbi, simetrije rješenja dolaze iz rješenja srodne linearne jednadžbe, često same jednačine. U ovom slučaju nelinearne evolucijske jednadžbe, simetrije rješenja dolaze iz linearne evolucijske jednadžbe u koju se nelinearna jednačina može transformirati pomoću transformacije točke. U slučaju Hamilton-Jacobi-Bellmanovih jednadžbi simetrije manje od maksimalne koja se ovdje razmatra, broj simetrija Lie tačke nije bio dovoljan da bude kompatibilan s terminalnim uvjetom. Očekivalo bi se da će to generalno biti slučaj.

Prema našim saznanjima, prva primjena analize Lie simetrije na Hamilton -Jacobi-Bellmanovu jednačinu u finansijskoj matematici bila je studija koju su Ibragimov i Gazizov uradili o Black-Scholesovoj jednadžbi [9] koja je jednadžba maksimalne simetrije u uobičajenim slučajevima za koje su varijansa i bezrizična kamatna stopa nezavisne od cijene dionice. Da je jednadžba sadržavala termin koji uništava simetriju, kao što smo vidjeli u nekoliko slučajeva razmatranih u ovom radu, vjerovatno nikada ne bi postojala historija interakcije između analize Lie simetrije i Hamilton-Jacobi-Bellmanovih jednačina financijskih Matematika.

Literatura

[1] Andriopoulos K & Leuch POL, Newtonian Economics

[2] Black Fisher & Scholes Myron, Vrjednovanje opcionih ugovora i test tržišne efikasnosti, Journal of Finance 27 (1972); 399-417

[3] Black Fisher & Scholes Myron, Određivanje cijena opcija i korporativnih obaveza časopis za političku ekonomiju 81 (1973), 637-659

[4] Bluman G.W. & Kumei S, Simetrije i diferencijalne jednadžbe, Applied Mathematical sciences 81 Springer – Verlag, New York 1989

[5] Burghes D, Graham A, Uvod u teoriju upravljanja uključujući optimalno upravljanje, Ellis Harwood, New York, 1980

[6] Ermakov V, Diferencijalne jednadžbe drugog reda uslovi potpune integrabilnosti, Universita, Izvestia, Kiev Serijo III, (1880), 1-25

[7] Heud, AK, LIE, PC programza Lieovu analizu diferencijalnih jednačina. Computer Physics Communications, 77 (1993), 241-248